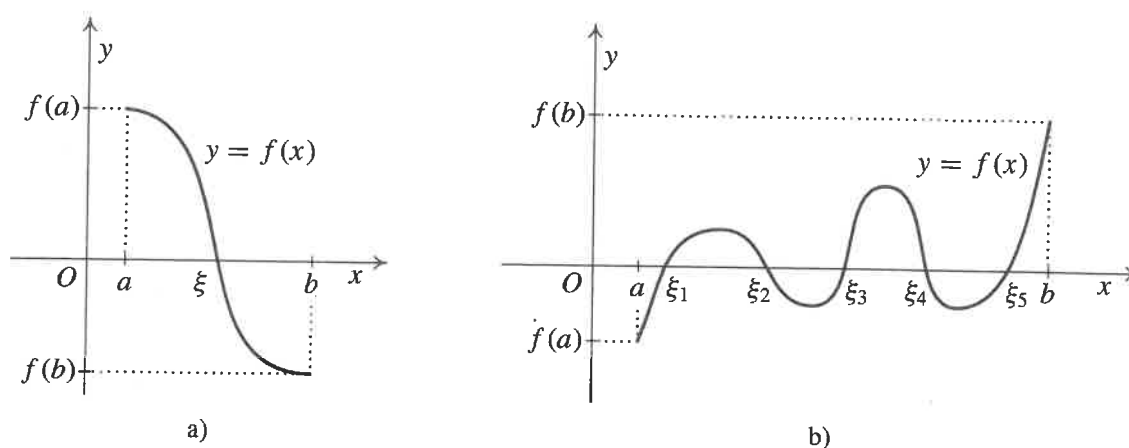


Nejprve si uvedeme větu, která popisuje důležitou vlastnost funkcí spojitých na uzavřeném ohraničeném intervalu.

V.10.1. Věta 8.1 (Cauchy¹-Bolzano). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = 0$.*



Obr. 8.1: Ilustrace Cauchyovy-Bolzanovy věty

Cauchyova-Bolzanova věta říká, že **spojitá funkce, která má v krajních bodech uzavřeného ohraničeného intervalu funkční hodnoty opačných znamének, má uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$ tzv. nulový bod ξ , tj. bod, pro který $f(\xi) = 0$** . To znamená, že graf této funkce protne v bodě ξ osu x — viz obr. 8.1 a). Nulových bodů může být ovšem více — viz obr. 8.1 b). Zkuste nakreslit graf funkce, která má nekonečně mnoho nulových bodů.

Pro zájemce:

Tato věta hraje důležitou roli při numerickém řešení nelineárních rovnic. Ukažme si, jak lze numericky řešit rovnici $f(x) = 0$ (metoda půlení intervalů).

Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Položme $x_1 = \frac{a+b}{2}$.

1. Je-li $f(x_1) = 0$, je bod x_1 hledaným řešením.

2. Je-li $f(x_1) \neq 0$, je buď $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, anebo $f(x_1) \cdot f(b) < 0$.

a) Je-li $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, nahradíme interval $\langle a, b \rangle$ intervalem $\langle a, x_1 \rangle$, vracíme se na začátek a položíme $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$ a znovu testujeme, zda $f(x_2) = 0$ nebo $f(x_2) \neq 0$.

b) Je-li $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, nahradíme interval $\langle a, b \rangle$ intervalem $\langle x_1, b \rangle$ a postupujeme obdobně.

¹Augustin Louis Cauchy (1789–1857) (čti koši) — vynikající francouzský matematik. Napsal přes 700 prací. Položil základy soudobé matematiky, především analýzy.



Buď po konečném počtu n kroků dostaneme bod $x_n \in (a, b) : f(x_n) = 0$, anebo tento proces provádíme tak dlouho, až dosáhneme toho, že délka intervalu obsahující kořen (kořeny) je menší, než požadovaná přesnost.

Nyní si uvedeme důsledek věty 8.1.

Důsledek 8.2. Je-li funkce f spojitá na intervalu J , zobrazí tento interval na jednobodovou množinu nebo na interval.

Větu 8.1 a její důsledek budeme využívat pro hledání intervalů, na nichž funkce f nabývá pouze kladných, resp. pouze záporných hodnot. Někdy budeme stručně říkat, že hledáme intervaly, na nichž je funkce kladná, resp. záporná.

V následující kapitole pak tuto větu využijeme při hledání intervalů, na nichž je funkce f' kladná, resp. záporná, což nám poslouží k určení intervalů monotonie, a konečně při hledání intervalů, na nichž je funkce f'' kladná, resp. záporná, což nám poslouží k určení intervalů konvexnosti a konkávnosti.

Určování intervalů, na nichž je funkce kladná, resp. záporná

Obecně v. 10. 1.

Cauchyova-Bolzanova věta říká, že nemá-li spojitá funkce na intervalu J nulový bod (tj. rovnice $f(x) = 0$ nemá řešení na J), je na tomto intervalu buď pořád kladná, anebo pořád záporná. Tedy pokud hledáme intervaly, na nichž je daná spojitá funkce kladná, resp. záporná, stačí najít všechny nulové body zadané funkce a definiční obor rozdělit těmito nulovými body na dílčí intervaly, kde bude funkce buď jen kladná, anebo jen záporná. Pak stačí vypočítat funkční hodnotu v jednom vnitřním bodě tohoto dílčího intervalu. Pokud vyjde záporná hodnota, jedná se o funkci, která je záporná na celém dílčím intervalu. V žádném bodě tohoto dílčího intervalu totiž nemůže být kladná, neboť to by v něm musel ležet další nulový bod. Analogická je situace, pokud vyjde kladná hodnota.



Příklad 8.3. Určete intervaly, na nichž je funkce $f: y = e^{x^2}(x^4 - 4x^2)$ kladná, resp. záporná.

Řešení.

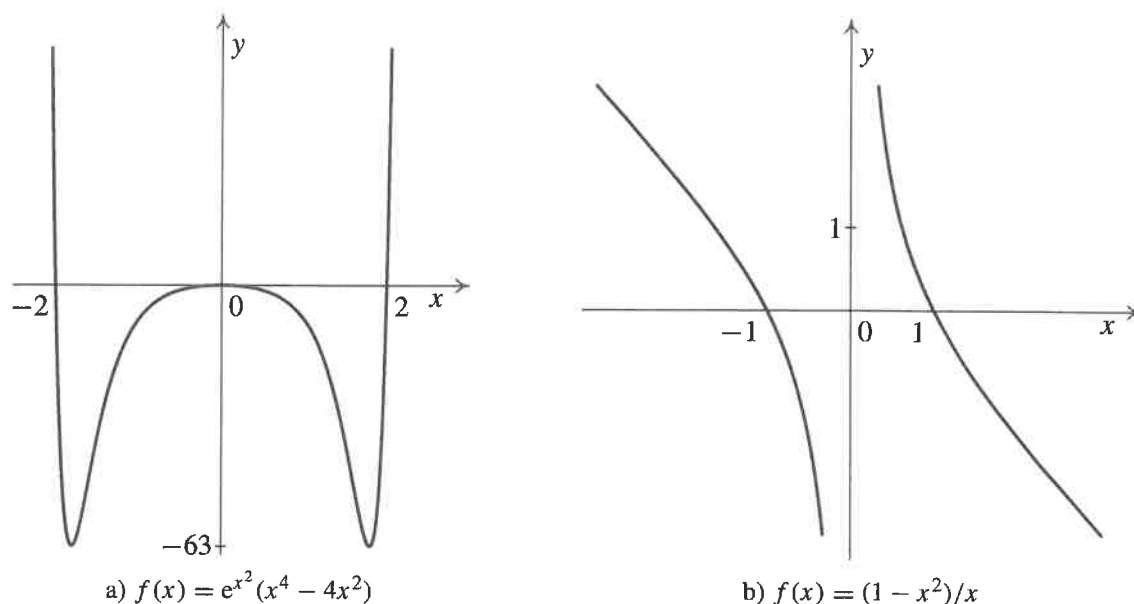
1. Nejprve vyšetříme spojitost funkce f . Jedná se o funkci elementární a ta je spojitá ve všech bodech, v nichž je definována. Ze zadání ihned vidíme, že $D(f) = \mathbb{R}$, tedy funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$.
2. Určíme nulové body funkce f , tj. body, kde je funkční hodnota rovna nule:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{x^2}(x^4 - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2(x - 2)(x + 2) = 0. \end{aligned}$$

Nulové body funkce f jsou: $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

3. Definiční obor rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 0), \quad (0, 2), \quad (2, \infty).$$



Obr. 8.2

4. Určíme znaménko funkce f na příslušných intervalech. Dle Cauchyovy-Bolzanovy věty stačí zvolit na každém z dílčích intervalů jeden bod a v něm určit funkční hodnotu. Podle znaménka funkční hodnoty se rozhodne, zda je funkce na tomto intervalu záporná či kladná. Pokud je funkční hodnota ve zvoleném bodě záporná, je funkce záporná na celém dílčím intervalu. Obdobně pro kladnou funkční hodnotu.

Např. v intervalu $(-\infty, -2)$ zvolíme bod -3 , v intervalu $(-2, 0)$ bod -1 , v intervalu $(0, 2)$ bod 1 a v intervalu $(2, \infty)$ bod 3 :

$$\begin{array}{ll}
 (-\infty, -2) & : \quad f(-3) = e^{(-3)^2}((-3)^4 - 4(-3)^2) = 45e^9 > 0, \\
 (-2, 0) & : \quad f(-1) = e^{(-1)^2}((-1)^4 - 4(-1)^2) = -3e < 0, \\
 (0, 2) & : \quad f(1) = e^{1^2}(1^4 - 4 \cdot 1^2) = -3e < 0, \\
 (2, \infty) & : \quad f(3) = e^{3^2}(3^4 - 4 \cdot 3^2) = 45e^9 > 0.
 \end{array}$$

5. Závěr: Funkce f je kladná na intervalu $(-\infty, -2)$ a na intervalu $(2, \infty)$ a záporná na intervalu $(-2, 0)$ a na intervalu $(0, 2)$. Graficky budeme tuto skutečnost znázorňovat takto:



Pro ilustraci uvádíme graf funkce f — viz obrázek 8.2 a)

▲



Příklad 8.4. Určete intervaly, na nichž je funkce $f: y = \frac{1-x^2}{x}$ kladná, resp. záporná. $\frac{(1-x)(1+x)}{x}$

Řešení.

1. Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkce je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$. Bod 0 je bod nespojitosti.
2. Nulové body funkce f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0.$$

Funkce f má dva nulové body: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

3. Definiční obor $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, \infty).$$

4. Určíme znaménko funkce f na příslušných intervalech. Z každého intervalu vybereme jeden bod a určíme znaménko funkční hodnoty v tomto bodě. Např. v intervalu $(-\infty, -1)$ zvolíme bod -2 , v intervalu $(-1, 0)$ bod $-\frac{1}{2}$, v intervalu $(0, 1)$ bod $\frac{1}{2}$ a v intervalu $(1, \infty)$ bod 2 :

$$(-\infty, -1) \quad : \quad f(-2) = \frac{1-(-2)^2}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} > 0,$$

$$(-1, 0) \quad : \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} < 0,$$

$$(0, 1) \quad : \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} > 0,$$

$$(1, \infty) \quad : \quad f(2) = \frac{1-2^2}{2} = \frac{-3}{2} < 0.$$

5. Závěr: Funkce f je kladná na intervalu $(-\infty, -1)$ a na intervalu $(0, 1)$ a záporná na intervalu $(-1, 0)$ a na intervalu $(1, \infty)$. Graficky:



Graf funkce si můžete prohlédnout na obrázku 8.2 b)



Pro zájemce:

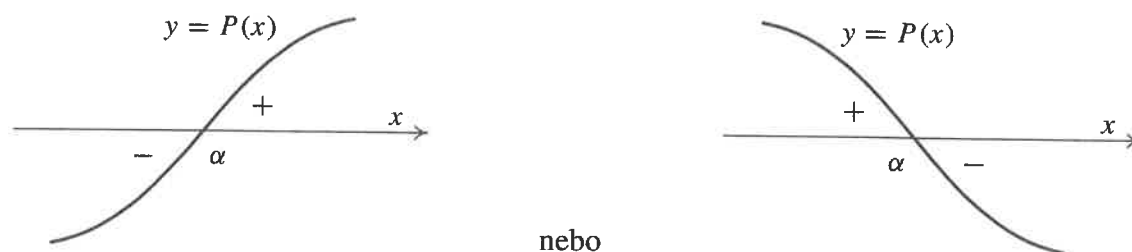
Mezi nejčastěji se vyskytující elementární funkce patří polynomy. Při určování intervalů, na nichž daný polynom nabývá kladné, resp. záporné hodnoty, můžeme postupovat stejně jako v předchozích příkladech, tj. vypočteme nulové body (kořeny), rozdělíme definiční obor nulovými body na disjunktní intervaly a určíme znaménko funkce na každém z těchto intervalů. Ukážeme si nyní, jak

Lze využít vlastností polynomu k tomu, abychom se vyhnuli výpočtu znaménka funkčních hodnot na všech intervalech. Bude nám stačit vypočítat znaménko jen na jednom intervalu. Značně si tím ušetříme práci obzvláště u polynomů vyšších stupňů.

Polynom je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$. Jestliže tedy dochází ke změně znaménka, protne nutně graf osu x , což znamená, že v tomto průsečíku je kořen. Vybereme jeden *reálný* kořen α polynomu P a všimneme si, jaký je průběh grafu funkce $P: y = P(x)$ v okolí tohoto bodu. Rozhodující roli hraje násobnost kořenu α . Lze odvodit:

1. Je-li násobnost lichá, dochází ke změně znaménka polynomu P , tj. graf přechází z jedné strany osy x na druhou.
2. Je-li násobnost sudá, nedochází ke změně znaménka polynomu P , tj. graf se osy x jen dotkne a vrátí se na stejnou stranu (podobně jako u paraboly $y = x^2$ v bodě $x = 0$).

Situace je znázorněna na následujících obrázcích (porovnejte se známými funkcemi $x, x^3, x^5, \dots, x^2, x^4, \dots$).



Obr. 8.3: Chování polynomu v okolí kořene liché násobnosti



Obr. 8.4: Chování polynomu v okolí kořene sudé násobnosti

Z předchozích úvah lze odvodit tento postup:

1. Rozložíme polynom P na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru (komplexní kořeny nás nyní nezajímají).
2. Na číselnou osu vyneseme všechny reálné kořeny s lichou násobností. Tím je číselná osa rozdělena na konečný počet intervalů.
3. Vybereme jeden bod x_0 , který není kořenem, a vypočteme $P(x_0)$. Jestliže platí $P(x_0) > 0$, je $P(x) > 0$ na celém intervalu z bodu 2), který obsahuje x_0 , s případnou výjimkou bodů, které jsou kořeny P se sudou násobností a leží v tomto intervalu. Obdobně, je-li $P(x_0) < 0$, je $P(x) < 0$ na celém příslušném intervalu s případnou výjimkou kořenů se sudou násobností.
4. V sousedních intervalech vzniklých v bodě 2) má P vždy opačná znaménka, tj. při přechodu přes kořen liché násobnosti polynom P mění znaménko (znaménka na intervalech z bodu 2) se pravidelně střídají).



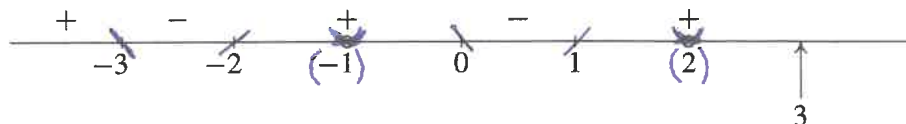
Příklad 8.5. Určete intervaly, na nichž daný polynom nabývá kladných, resp. záporných hodnot.

$$P: y = (x - 1)^3(x + 1)^4(x^2 + x + 1)^3(x + 2)(x + 3)^5(x - 2)^2x.$$

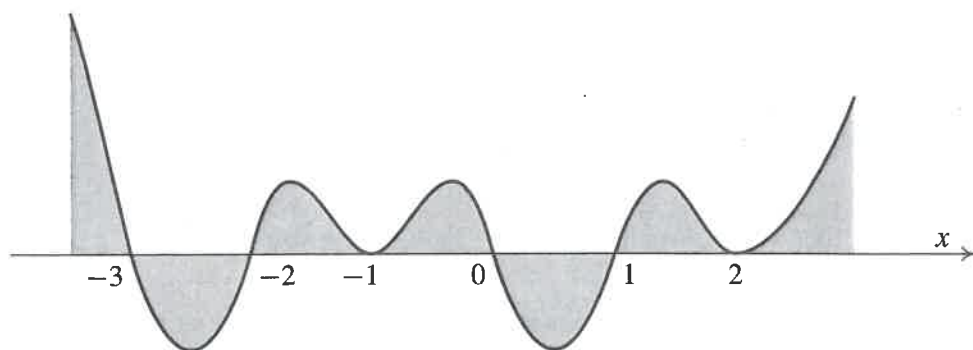
Řešení. Polynom je zadán ve tvaru součinu ireducibilních činitelů v reálném oboru (všechny členy jsou lineární nebo kvadratické, které již v reálném oboru nelze dále rozložit — ověřte si, že trojčlen $x^2 + x + 1$ nemá v reálném oboru žádný kořen).

Reálné kořeny jsou 1, -1, -2, -3, 2 a 0. Z nich lichou násobnost mají $x = 1$ (trojnásobný), $x = -2$ (jednoduchý), $x = -3$ (pětinásobný) a $x = 0$ (jednoduchý). Vyneseme je na číselnou osu — viz obrázek níže.

Vybereme např. číslo $x_0 = 3$ a vypočteme $P(3) = 2^3 \cdot 4^4 \cdot 13^3 \cdot 5 \cdot 6^5 \cdot 1^2 \cdot 3 > 0$ (potřebujeme jen znaménko, proto je zbytečné vyčíslovat konkrétní hodnotu). Tedy v intervalu obsahujícím číslo 3 má P kladné znaménko a v sousedních intervalech se znaménka pravidelně střídají.



Pro úplnost je třeba ještě dodat, že v kořenech se sudou násobností $x = -1$ (čtyřnásobný) a $x = 2$ (dvojnásobný) je hodnota rovněž nula. Nyní na základě znalosti intervalů, na nichž daný polynom nabývá kladných, resp. záporných hodnot, můžeme načrtnout přibližný graf polynomu P .



8.1 Věty o střední hodnotě

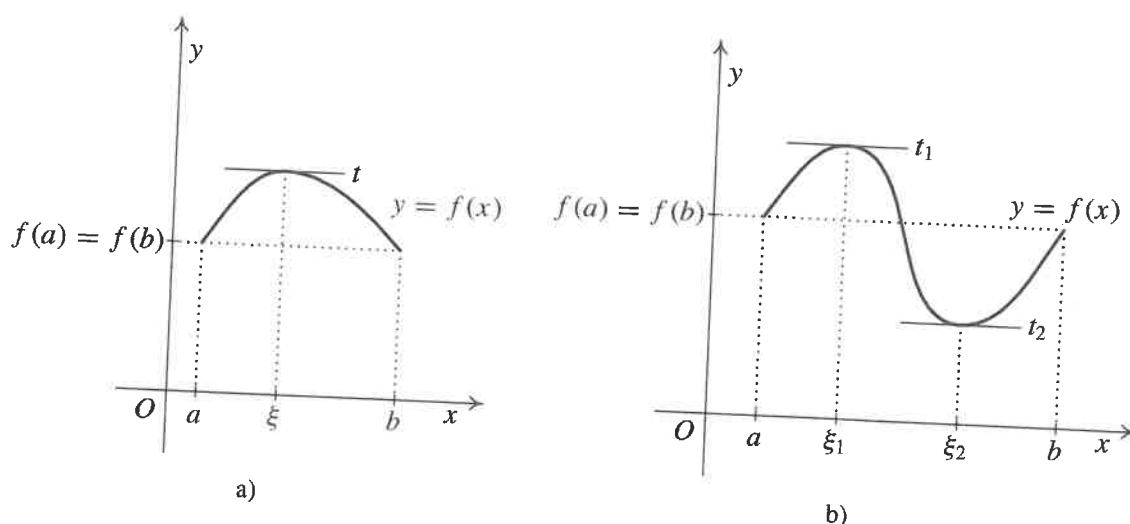
Nyní si uvedeme tři věty, jež se obvykle souhrnně nazývají *věty o střední hodnotě*. V těchto větách budeme kromě spojitosti funkce na uzavřeném ohraničeném intervalu požadovat i existenci derivace.

V. 10. 2.

Věta 8.6 (Rolle¹). Necht' funkce f má následující vlastnosti:

- i) je spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $[a, b]$,
- ii) má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) ,
- iii) platí $f(a) = f(b)$.

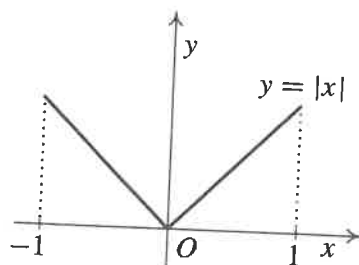
Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.



Obr. 8.5: Rolleova věta

Věta 8.6 říká, že jsou-li splněny podmínky i), ii), iii), pak existuje bod, v němž je tečna t rovnoběžná s osou x — viz obr. 8.5 a). Očividně takových bodů může být více — viz obr. 8.5 b), dokonce nekonečně mnoho. Zkuste takovou funkci najít.

Všimněme si, že žádnou z podmínek i), ii), iii) nelze vynechat. Uvažujme například funkci $f: y = |x|$, $x \in (-1, 1)$. Tato funkce nemá v bodě $x = 0$ derivaci (v jediném bodě chybí derivace!), a tudíž nespĺňuje předpoklady Rolleovy věty. Bod zmíněné vlastnosti již nemusí existovat. Skutečně. V žádném bodě grafu funkce f není tečna rovnoběžná s osou x — viz obr. 8.6.



Obr. 8.6

¹Michel Rolle (1652–1719) (čti rol) — francouzský matematik. Zabýval se algebrou.

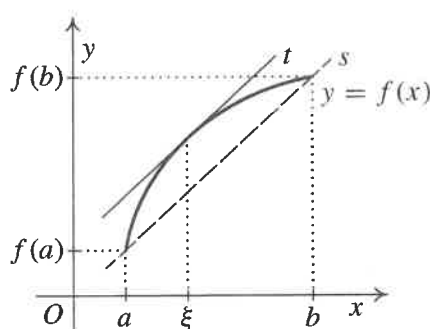
V. 10. 3.

*= věta o průměrné hodnotě funkce, má-li věta o střední hodnotě***Věta 8.7 (Lagrange).** *Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

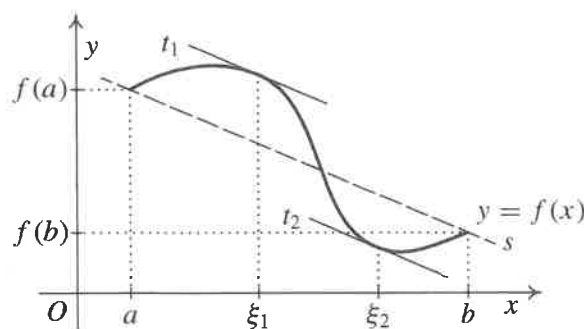
- i) *je spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b \rangle$,*
- ii) *má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) .*

Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



a)



b)

Obr. 8.7: Lagrangeova věta

I tato věta má názorný geometrický význam. Sestrojíme sečnu s grafu funkce f procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Její směrnice je $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Věta říká, že existuje bod $\xi \in (a, b)$, v němž má tečna t ke grafu funkce f směrnici rovnou k , tj. tečna t sestrojená v dotykovém bodě $(\xi, f(\xi))$ je rovnoběžná se sečnou s — viz obr. 8.7 a). Takových bodů může být samozřejmě i více — viz obr. 8.7 b).

Poznámka 8.8.

1. Rolleova věta je speciálním případem Lagrangeovy věty. Přidáme-li k předpokladům Lagrangeovy věty předpoklad $f(a) = f(b)$, dostaneme tvrzení: existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{0}{b - a} = 0,$$

což je přesně tvrzení Rolleovy věty (tečna sestrojená v dotykovém bodě $(\xi, f(\xi))$ je rovnoběžná se sečnou procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ a ta je rovnoběžná s osou x).

2. Podívejme se na fyzikální interpretaci Lagrangeovy věty. Vyjadřuje-li $f(t)$ dráhu v závislosti na čase t pohybujícího se bodu, je podíl $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ průměrná rychlost v časovém intervalu $\langle a, b \rangle$ a $f'(\xi)$ je okamžitá rychlost v čase ξ . Věta říká, že v intervalu (a, b) existuje čas ξ , ve kterém je okamžitá rychlost rovna průměrné rychlosti na celém intervalu.

Lagrangeova věta má dva velmi důležité důsledky, které budeme potřebovat v integrálním počtu.

Víme, že $(c)' = 0$, kde c je konstanta. První důsledek říká, že platí i opak.

Důsledek 8.9. Je-li $f'(x) = 0$ na intervalu I , je $f(x) = c$ na I , tj. je to konstantní funkce.

Důkaz. Necht' $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Protože však $f'(\xi) = 0$, je $f(x_1) = f(x_2)$, což dokazuje tvrzení. $\square$

Podobně je-li $f(x) = g(x) + c$, kde c je konstanta, pak $f'(x) = (g(x) + c)' = g'(x) + c' = g'(x)$. Druhý důsledek říká, že i toto tvrzení lze obrátit — mají-li dvě funkce stejnou derivaci, liší se o konstantu.

Důsledek 8.10. Je-li $f'(x) = g'(x)$ na intervalu I , pak existuje konstanta c tak, že platí $f(x) = g(x) + c$ na I .

Důkaz. Stačí aplikovat důsledek 8.9 na rozdíl $f(x) - g(x)$. $\square$

Poznámka 8.11.

V obou předchozích důsledcích je podstatné, že se mluví o intervalu. Pokud nejde o interval, tvrzení nemusí platit. Např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-1, 0), \\ 1 & \text{pro } x \in (0, 1), \end{cases}$$

má v každém bodě nulovou derivaci, ale přitom není konstantní.

V.10.4. **Věta 8.12 (Cauchy).** *= obecná věta v příručce funkce, obecná věta o střední hodnotě* Necht' funkce f a g mají následující vlastnosti:

- i) jsou spojité na uzavřeném ohraničeném intervalu $[a, b]$,
- ii) mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b) , přičemž $g'(x) \neq 0$ na (a, b) .

Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Lagrangeova věta je speciálním případem Cauchyovy věty (stačí zvolit $g(x) = x$).

§44. 8.2 L'Hospitalovo pravidlo

V kapitole o limitě a spojitosti jsme si slíbili, že pro výpočet limit vedoucích na některé nedefinované výrazy si uvedeme efektivnější nástroj, než je výpočet pomocí úprav výrazu v limitě. Nyní, když máme k dispozici derivace, to lze udělat. Bude se jednat o výpočet limity podílu $\frac{f(x)}{g(x)}$. Slíbeným prostředkem je tzv. l'Hospitalovo pravidlo.

V.11.1.

Věta 8.13 (l'Hospital¹). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka 8.14.

1. l'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity. *l'Hospitalovo pravidlo lze rovněž mnohokrát generalizovat*
2. Připomeňme, že je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, říkáme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ je limita typu $\frac{0}{0}$. Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, mluvíme o limitě typu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. V konkrétních příkladech píšeme typ limity do hranatých závorek, např. $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$.
3. l'Hospitalovo pravidlo říká, že limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se dá v případě, že se jedná o limitu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right]$, nahradit limitou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ za předpokladu, že tato druhá limita existuje (může být i nevlastní).
4. Všimněte si, že ve výrazu $\frac{f(x)}{g(x)}$ derivujeme zvlášť čítelel a zvlášť jmenovatel (nejedná se tedy o derivaci podílu!).
5. Podívejme se podrobněji na limitu $\left[\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right]$. V případě, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$, víme, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{C}{\pm\infty} = 0,$$

tj. obejdeme se bez l'Hospitalova pravidla. l'Hospitalovo pravidlo tedy teoreticky použijeme, pouze když $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ neexistuje nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$. Prakticky se však nemusíme limitou v čitateli vůbec zabývat — může se jednat o limitu, kterou neumíme nebo nechceme počítat.

6. Opět je třeba zdůraznit, že nic z předpokladů nelze vynechat.
 - i) Nejprve je třeba zjistit, zda se jedná o limitu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right]$.
 - ii) Musí platit, že limita podílu derivací $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje. To zjistíme tak, že ji vypočítáme.

¹Guillaume François Antoine l'Hospital (1661–1704) (čti lopital) — francouzský matematik. Zabýval se matematickou analýzou a geometrií.

Pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, pak nelze použít l'Hospitalovo pravidlo a musíme

hledat jinou cestu, jak danou limitu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ vypočítat.

A) **Limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$**

Příklad 8.15. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2},$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a \in (0, \infty).$



Řešení. Nejprve určíme, o jaký typ limity se jedná. Použití l'Hospitalova pravidla vyznačíme v příslušném místě nad rovnítkem symbolem *LP*.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{4}{4 - 1} = \frac{4}{3}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1.$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} a^x \cdot \ln a = a^0 \cdot \ln a = \ln a.$

▲

U l'Hospitalova pravidla je obvyklé vícenásobné použití. Dostaneme-li po derivování opět limitu podílu a jsou-li splněny předpoklady věty 8.13, můžeme znovu zderivovat čitatele a jmenovatele atd.

Příklad 8.16. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x},$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 2}{3x^3 - 2x^2 + x},$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{(x - 1)^2}.$



Řešení.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{\cos 0}{\cos 0 + \cos 0 + 0(-\sin 0)} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \frac{1}{2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 2}{3x^3 - 2x^2 + x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 1}{9x^2 - 4x + 1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x}{18x - 4} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{(x-1)^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2(x-1)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{2} = \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$



Příklad 8.17. Vypočítejte následující limity

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{101}}{x^{100}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^9 + 2x^5 - 3}{x^7 + x^3 + 2}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^8 + x^4 - 5}.$$

Řešení.

- a) Jedná se o limitu $\left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$ a platí, že limita podílu derivací existuje, lze tedy l'Hospitalovo pravidlo použít. Na první pohled je však jasné, že počítat tuto limitu l'Hospitalovým pravidlem by bylo velice neefektivní. Museli bychom stokrát derivovat, než bychom se dostali k výsledku. Mnohem snadnější je nejprve výraz v limitě upravit (pomocí krácení) a tím se vlastně hned dostaneme k výsledku:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{101}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

- b) Opět se jedná se o limitu $\left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$. Stejně jako v předchozím příkladě by bylo neefektivní používat l'Hospitalovo pravidlo. Použijeme proto známé úpravy — vytkneme z čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninu x , jež se vyskytuje ve jmenovateli. Obdobně jsme řešili příklad 6.39.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^9 + 2x^5 - 3}{x^7 + x^3 + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7(x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^7})}{x^7(1 + \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^7})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^7}}{1 + \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^7}} = \\ &= \frac{+\infty + 0 - 0}{1 + 0 + 0} = +\infty. \end{aligned}$$

- c) Analogicky jako v předchozím příkladě budeme vytýkat z čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninu x , jež se vyskytuje ve jmenovateli.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^8 + x^4 - 5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^8(\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7})}{x^8(1 + \frac{1}{x^4} - \frac{5}{x^8})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7}}{1 + \frac{1}{x^4} - \frac{5}{x^8}} = \\ &= \frac{0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0. \end{aligned}$$

Z předchozích příkladů je vidět, že řešíme-li limitu pro x jdoucí do $\pm\infty$ typu $\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$, pak je užití l'Hospitalova pravidla neefektivní. K řešení limity použijeme raději úpravu vytýkáním. Obecně lze říci, že o výsledku rozhodne nejvyšší mocnina x . Je-li v čitateli polynom vyššího stupně než ve jmenovateli, pak je výsledek $+\infty$ nebo $-\infty$, je-li v čitateli polynom nižšího stupně než ve jmenovateli, je výsledek 0. Pokud je v čitateli i jmenovateli polynom stejného stupně, pak je výsledek dán koeficienty u těchto nejvyšších mocnin x — viz příklad 6.39.

V příkladě 8.17 bylo možno l'Hospitalovo pravidlo použít, ale bylo by to velmi neefektivní. Nyní si ukážeme případy, kdy l'Hospitalovo pravidlo použít nemůžeme.

Příklad 8.18. Vypočítejte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.



Řešení. Jedná se o limitu $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$, lze tedy uvažovat o použití l'Hospitalova pravidla.

Připravíme si derivaci jmenovatele. Funkce $\sqrt{x^2 + 1}$ je složená. Tudíž

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = [(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{LP}{=} \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \end{aligned}$$

což je výchozí limita. Vidíme, že l'Hospitalovo pravidlo nám při výpočtu této limity nepomůže. Otázka zní — mohli jsme v tomto případě vůbec použít l'Hospitalovo pravidlo? Podívejte se znovu na větu 8.13 a následnou poznámku. L'Hospitalovo pravidlo lze použít právě tehdy, jedná-li se o limitu příslušného typu a navíc existuje limita podílu derivací. My v této chvíli nevíme, zda limita podílu derivací existuje, neboť se nám ji dosud nepodařilo vypočítat. Nevíme tedy, zda je předchozí zápis korektní.

Křešení použijeme vytýkání a krácení — analogicky jako v příkladě 6.39

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1.$$

Příklad 8.19. Vypočítejte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$.



Řešení. Podívejme se nejprve, zda lze k výpočtu dané limity použít l'Hospitalovo pravidlo. Označme $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$. Chceme vypočítat limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Vidíme, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, jedná se tedy o typ limity vhodný k použití l'Hospitalova pravidla. Není třeba zkoumat limitu čitatele, pouze pro zájemce uvádíme, že $f(x) \geq x - 1$, takže vzhledem k tomu, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, je podle poznámky 6.41 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Další předpoklad věty 8.13 ovšem je, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje. Ale v našem případě

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

neexistuje, nelze tedy l'Hospitalovo pravidlo použít.

Danou limitu vypočteme pomocí následujících úprav:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \stackrel{(*)}{=} 1 + 0 = 1.$$

(*)): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$, neboť $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ a funkce sinus je ohraničená (využili jsme věty 6.43). v. 5.4. ▲

b) Limity typu $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$

Limitu typu $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$ nelze přímo počítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Rozdíl, příp. součin funkcí je třeba nejprve převést na podíl funkcí. Tím dostaneme typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Postup si ukážeme na příkladech.



Příklad 8.20. Vypočítejte následující limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$

Řešení.

a) Jedná se o limitu typu $\infty - \infty$. Podíl dostaneme tak, že zlomky převedeme na společného jmenovatele:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{-\sin 0}{\cos 0 + \cos 0 + 0(-\sin 0)} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

b) Analogicky jako v předchozím příkladě převedeme rozdíl funkcí na podíl.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - \sin x}{(e^x - 1) \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{e^x \sin x + (e^x - 1) \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - (e^x - 1) \sin x} = \frac{1 + 0}{0 + 1 + 1 - 0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Jedná se o limitu typu $0 \cdot (-\infty)$. Podíl dostaneme uměle vytvořením složeného zlomku:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \quad \blacktriangle$$

c) Limity typu $f(x)^{g(x)}$ ($0^0, \infty^0, 1^\infty, (0^\infty)$)

K úpravě limity tohoto typu použijeme vztah (6.2), vypočteme limitu funkce v exponentu a výsledek pak dostaneme aplikací důsledku 6.51.

❗ **Příklad 8.21.** Vypočtěte následující limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,
 1^∞

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$,
 ∞^0

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$,
 0^0

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$,
 1^∞



Řešení.

a) K úpravě použijeme vztah (6.2) a dostáváme:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \cdot \ln \cos x}$$

Vypočteme limitu výrazu v exponentu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2 \cos x + 2x(-\sin x)} = \\ &= \frac{-\cos 0}{2 \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot (-\sin 0)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

S využitím důsledku 6.51 je tedy původní limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

b) Pomocí vztahu (6.2) a dostáváme:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln \frac{1}{x}}.$$

Vypočteme limitu výrazu v exponentu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

S využitím důsledku 6.51 je tedy původní limita

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \stackrel{0^0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = -\frac{0}{1} = 0$
 (přímá aplikace důsledku 6.51 pro e^x je rychlejší)



d) Opět nejprve upravíme:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Vypočteme limitu výrazu v exponentu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1. \end{aligned}$$

Pak podle důsledku 6.51 je původní limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

Příklady na spojitost funkce



Příklad 8.22. Určete, zda je funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 2 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

spojitá v bodě 0.

Řešení. Funkce f je spojitá v bodě 0, jestliže platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Musíme tedy spočítat limitu funkce f v bodě 0 a porovnat ji s funkční hodnotou v bodě 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LP}{=} \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{1} = 2. \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$. Funkce f je v bodě 0 spojitá.



Pojmy k zapamatování

- Rolleova věta,
- Lagrangeova věta,
- Cauchyova věta,
- l'Hospitalovo pravidlo.